Sul perielio di Mercurio

Giuseppe Giudice

27 gennaio 2006

Riassumo qui brevemente il valore teorico dell'avanzamento di Mercurio previsto dalla Relatività Generale e il risultato di una simulazione con ORSA.

Il valore dell'avanzamento del perielio dato dalla Relatività Generale è

$$\Delta\pi_R = \frac{3n^3a^2}{c^2(1-e^2)}t \tag{1}$$

in cui $\Delta\pi_R$ è l'aliquota di avanzamento del perielio previsto dalla Relatività Generale, e che va sommato a quello previsto dalle perturbazioni newtoniane, n è il moto medio del pianeta, a il semiasse maggiore della sua orbita, e la relativa eccentricità, t il tempo e c la velocità della luce nel vuoto.

La velocità di rotazione si ottiene semplicemente derivando la precedente rispetto al tempo; siccome le quantità che compaiono al secondo membro, tranne il tempo, sono virtualmente indipendenti dal tempo, si può dire che essa è uguale alla sola frazione che compare al secondo membro.

il moto medio è a sua volta collegato al semiasse maggiore e alla massa del pianeta dalla terza legge di Keplero

$$n = k\sqrt{\frac{1+m}{a^3}} \tag{2}$$

in cui k è la costante gravitazionale di Gauss

$$k = 0.01720209895$$

ed m è la massa del pianeta considerando unitaria quella del Sole. Il fatto di usare la costante di Gauss implica che stiamo misurando le masse in unità solari, il tempo in giorni solari medi, le lunghezze in unità astronomiche e gli angoli ovviamente in radianti, per cui il moto medio, e anche l'avanzamento del perielio saranno misurati in radianti al giorno. In questo sistema la velocità della luce è

$$c = \frac{1}{499.004782}\frac{\mathrm{UA}}{\mathrm{s}}. \tag{3}$$

Di solito in questo calcolo si preferisce usare per unità di tempo il secolo, indubbiamente più comodo, e per unità di angolo il secondo d'arco. per questa ragione la (3) va moltiplicata per 86400×36525 (numero di secondi in un secolo) e la velocità ottenuta va moltiplicata per $180 \times 3600/\pi$ per passare da radianti a secondi d'arco.

Come applicazione ho calcolato l'avanzamento del perielio in una simulazione di ORSA in cui il solo pianeta presente (oltre al Sole) era Mercurio, il calcolo è stato effettuato dal J1900 (31 dicembre 1899, ore 12.00 di TE) al J2100 (1 gennaio 2100, ore 12.00 di TE), con integratore Everhardt RADAU e precisione 10^{-15}. I risultati sono stati i seguenti:

1. L'inclinazione dell'orbita e la longitudine del nodo sono assolutamente costanti

2. Il semiasse maggiore e l'eccentricità oscillano in fase, con periodo pari al periodo di rivoluzione di Mercurio

3. l'argomento del perielio aumenta con un andamento a dente di sega, con una oscillazione sovrapposta ad un aumento lineare

I risultati ottenuti sono stati adattati ad una retta col metodo dei minimi quadrati, considerando esatti i tempi (ascisse) e soggetti ad errore solo le ordinate (di volta in vota i vari parametri dell'orbita). L'intervallo di tempo usato per mediare è inferiore a quello dell'integrazione, in modo da avere il più possibile un numero intero di rivoluzioni di Mercurio, in particolare si è mediato tra $T = -1$ e $T = 0.999$, cioè quasi 83 rivoluzioni di Mercurio (mancano 3 gradi)

Ecco i risultati:

1. L'inclinazione dell'orbita è di 7.01097517275, con stabilità alla dodicesima cifra significativa.

2. La longitudine del nodo risulta stabile alla tredicesima cifra significativa ed è 48.45668425543

3. Il semiasse maggiore oscilla tra 0.38709767 e 0.38709773 con valore al tempo zero (ossia J2000), cioè un'intercetta sull'asse Y di 0.3870977085 e un errore standard sull'intercetta di 2.96×10^{-10}, per cui ritengo valide dieci cifre significative. A questo livello di precisione la pendenza della retta di correlazione (10^{-12}) è trascurabile.

4. L'eccentricità ha un andamento oscillante identico a quello del semiasse maggiore, ed oscilla tra i valori 0.20562442 e 0.20562459 con intercetta della retta di correlazione pari a 0.205624535, valore che prendo con 9 cifre significative in quanto l'errore standard su questo valore è 7.2×10^{-10}. A questo livello di precisione la pendenza della retta di correlazione (10^{-11}) è trascurabile.

5. L'argomento del perielio ha una tendenza crescente, cui è sovrapposto un andamento oscillante di ampiezza 4×10^{-5} gradi. La retta di correlazione ha un'intercetta di 28.8523356 (errore standard $1,7 \times 10^{-7}$) e una pendenza di 42.9807 arcsec/secolo (errore standard 6×10^{-4} arcsec/secolo)

Con i dati medi così determinati per il semiasse maggiore e l'eccentricità e con l'inverso della massa di Mercurio pari a 6023000 (che considero con cinque cifre esatte) si ha che $(1 + m)$ ha 11 cifre esatte, per cui n va preso con 10 cifre esatte (come a) e vale 2608.800094 radianti/secolo. A questo punto il fattore limitante su $\dot{\pi}$ è proprio c che ho assunto con 9 cifre esatte, per cui

$$\dot{\pi} = 42.9807089 \text{ arcsec/secolo}$$

L'errore della determinazione di ORSA è quindi da prendersi pari all'errore standard sul $\dot{\pi}$, ossia 6×10^{-4} arcsec/secolo, probabilmente in maggior parte dovuto al residuo di 2 gradi in longitudine di Mercurio nell'intervallo di tempo.

Ho anche proceduto ad un'integrazione del Sistema Solare (esclusi Plutone e gli asteroidi) tra gli stessi intervalli di tempo e con la stessa precisione, una volta col termine relativistico e una volta senza.

I risultati sono stati:

- Senza il termine relativistico
  1. Semiasse maggiore 0.38709832 con otto cifre di precisione
  2. Eccentricità 0.2056318 con sette cifre di precisione
  3. Inclinazione 7.004977 gradi con sei cifre decimali di precisione
  4. Precessione della longitudine nodo -452.52 ± 0.015 arcosecondi/secolo (cioè di fatto è una retrocessione)
  5. Precessione dell'argomento del perielio 980.43 ± 0.087 arcosecondi/secolo
  6. Precessione della longitudine del nodo (somma delle precedenti) 528.91 ± 0.08 arcosecondi/secolo (l'errore è stato ottenuto combinando i precedenti in quadratura).
- Col termine relativistico
  1. Semiasse maggiore 0.38709831 con otto cifre di precisione
  2. Eccentricità 0.205632 con sei cifre di precisione; essa diminuisce di $(2.019 \pm 0.008) \times 10^{-5}$ all'anno
  3. Inclinazione 7.004977 gradi con sei cifre decimali di precisione
  4. Precessione della longitudine nodo -451.55 ± 0.015 arcosecondi/secolo
  5. Precessione dell'argomento del perielio 1023.43 ± 0.087 arcosecondi/secolo
  6. Precessione della longitudine del nodo (somma delle precedenti) 571.88 ± 0.08 arcosecondi/secolo (l'errore è stato ottenuto combinando i precedenti in quadratura).

Differenze notevoli sui due casi sono sintetizzati nella tabella seguente:

	Long. Nodo	Arg. Perielio	long. perielio
Caso relativistico	-451.55 ± 0.015	1023.43 ± 0.087	571.88 ± 0.09
Caso classico	-451.52 ± 0.015	980.43 ± 0.087	528.91 ± 0.09
Differenza	-0.03 ± 0.02	43.00 ± 0.12	42.97 ± 0.13
Valore teorico	0	42.98	42.98

In conclusione le simulazioni di ORSA confermano i risultati teorici entro una precisione di pochi centesimi di secondo d'arco al secolo; questa precisione può forse essere migliorata con un metodo di interpolazione più raffinato.

Come ulteriore controllo ho considerato per tutto il periodo dell'integrazione le differenze $\Omega_R - \Omega_N$ e $\omega_R - \omega_N$, ossia tra integrazione relativistica e integrazione solo newtoniana per la longitudine del nodo e l'anomalia del perielio.

L'andamento di $\Omega_R - \Omega_N$ presenta un'andamento parabolico, con tangente orizzontale al tempo iniziale della simulazione; attribuisco questo ad un effetto sistematico dovuto al progressivo allontanarsi della soluzione classica da quella relativistica e che provoca un effetto del secondo ordine; per questa ragione ritengo che non si debba tener conto della pendenza della retta di migliore adattamento. In ogni caso, questa viene calcolata e ha una pendenza di -0.0272 ± 0.0001 arcsec/secolo, coerente col risultato ottenuto in tabella.

Con questo effetto del secondo ordine si spiega quindi anche la differenza tra movimento del nodo che era emerso nel confronto tra soluzione classica e soluzione relativistica. Ciò dimostra anche con quale cautela si debba applicare il principio di sovrapposizione degli effetti in casi in cui, come questo, gli effetti sono tutti, sia pure debolmente, interdipendenti.

La differenza nell'argomento del perielio $\omega_R - \omega_N$ ha un andamento lineare con sovrapposte delle oscillazioni con periodo pari al periodo di rivoluzione di Mercurio; la pendenza della retta dei minimi quadrati è di 42.9994 ± 0.0009 arcsec/secolo.

La differenza nella longitudine del nodo è uguale alla somma delle due precedenti; ma poiché ho dimostrato che la differenza nel moto del nodo si deve considerare nulla, adotto lo stesso valore della differenza precedente, ossia 42.9994 ± 0.0009 arcsec/secolo.

La differenza dal valore teorico scende quindi a

$$42.9994 \pm 0.0009 - 42.9807 \text{ arcsec/secolo} = 0.0187 \pm 0.0009 \text{ arcsec/secolo}$$

ossia meno di 2 centesimi di arcosecondo ogni secolo, confermando così la precisione della simulazione ORSA.