La variabilità annuale del mese sinodico

Giuseppe Giudice

28 novembre 2005

Sommario

In questa nota intendo rispondere alla domanda posta dall'ottimo Stefano De Rosa, Astrofilo Napoletano, a proposito della durata del mese sinodico. Su tutti i libri viene data una durata media di 29.53 giorni, magari con parecchie cifre dopo la virgola, ma nulla viene detto a proposito di quella fonte di variabilità che è data dalla diversa velocità del moto apparente del Sole sull'eclittica. Presento qui un calcolo della durata del mese sinodico che tiene conto di questa variazione, ma anche di un'altra, ossia la cosiddetta equazione annuale della Luna, causata dalla maggiore o minore distorsione che l'orbita lunare subisce da parte del Sole.

S'intende per mese sinodico il periodo che va da luna nuova a luna nuova; a sua volta la luna nuova è l'istante in cui la longitudine eclittica della Luna è uguale a quella del Sole.

Il calcolo della fase lunare è molto complesso; occorre conoscere nell'istante considerato la posizione sia del Sole che della Luna, e questa determinazione è tutt'altro che facile.[1] Però talvolta, come per esempio nei calcoli calendariali, non è necessario tenere conto di tutte le molteplici perturbazioni che alterano la posizione dei due astri, e che sono dovute all'ellitticità delle orbite della Terra e della Luna e all'attrazione degli altri pianeti sul loro moto, e quindi basta la considerazione dei rispettivi moti medi.

In questa nota intendo studiare la variabilità del mese sinodico causata dall'ellitticità dell'orbita terrestre, per cui considererò oltre al moto medio anche i termini perturbativi dipendenti dalla posizione della Terra sulla sua orbita.[2]

I moti medi del Sole e della Luna sono oggetto di studio da innumerevoli anni e da altrettanto tempo soggetti ad osservazione; quindi le formule che

[1]Intendiamoci: è difficile per chi ne svolge la teoria, e forse anche per chi, partendo da zero, deve cercarne in biblioteca l'espressione analitica (oggi le teorie più complete vengono pubblicate solo in forma elettronica su Internet); ma una volta avuta questa, i calcoli sono forse lunghi, ma ripetitivi, trattandosi di un'enorme serie di seni e/o di coseni, intrattabile a mano, ma facilissima concettualmente con un calcolatore programmabile.

[2]Tale posizione è quantificata dalla variabile detta *anomalia*, che è pari a zero quando la Terra è al perielio e a 180 gradi quando essa è all'afelio.

si possono trovare in letteratura sono senz'altro affidabili; tali sono anche i termini perturbativi dipendenti dall'ellitticità dell'orbita terrestre; forse altri termini perturbativi lo sono meno, ma sono anche molto piccoli, per cui la loro relativa imprecisione non danneggia il risultato finale. Nel seguito ho fatto riferimento all'ottimo libro *Astronomical Algorithms* di Jean Meeus, che ha il pregio di dare con chiarezza le basi concettuali dei calcoli, anche se oggi sono uscite teorie più precise, alle quali occorrerebbe fare riferimento.

Cominciamo dunque a precisare che il tempo usato in questi calcoli è il tempo dinamico, misurato dagli orologi atomici, ed in continuità col vecchio tempo delle effemeridi (TE); si distingue un tempo dinamico terrestre (TT), se l'orologio si suppone alla superficie della Terra, un tempo dinamico geocentrico (TG), se l'orologio si suppone al centro della Terra, e un tempo dinamico baricentrico (TB), se l'orologio si suppone nel baricentro del sistema solare; la differenza fra i tre è trascurabile ai nostri fini.

L'unità di tempo atomico è il secondo, definito come

> la durata di 9192632770 cicli della radiazione corrispondente alla transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di Cesio 133;

ma di solito in questi calcoli si usano due multipli del secondo, ossia il giorno, pari a 86400 secondi, e il secolo giuliano, pari a 36525 giorni.

Il tempo segnato dai nostri orologi[3] è detto Tempo Universale Coordinato (TUC), è sincronizzato sulla rotazione della Terra ed è in ritardo sul tempo dinamico di un certo numero di secondi, a causa del progressivo rallentamento della rotazione terrestre.[4]

La longitudine media del Sole, riferita all'equinozio medio della data, è data, in gradi, dalla formula

$$L_M = 280.46645 + 36000.76983\ T + 0.0003032\ T^2 \tag{1}$$

[3] Io mi regolo sul Televideo RAI, ma vanno bene anche i segnali orario di RadioRAI; vi sono poi moltissimi siti Internet che danno l'ora esatta, compatibilmente con la velocità delle linee telefoniche. Non mi fido invece del segnale orario Mediaset, che potrebbe essere regolato sul meridiano di Arcore. Naturalmente, per passare dal tempo del segnale orario a quello Universale Coordinato occorre sottrarre un'ora d'inverno (ora solare) e due ore d'estate (ora legale).

[4] Il Tempo Dinamico è in anticipo sul Tempo Atomico (TA) di 32.184 s; questo valore è dovuto a ragioni storiche ed è immutabile. A sua volta il Tempo Atomico è in anticipo sul Tempo Universale Coordinato di un numero variabile di secondi, in dipendenza dai capricci della rotazione terrestre. Nel periodo 1999-2005 questo ritardo è di 32 secondi. L'ultimo minuto di TUC del 2005 sarà composto di 61 secondi per recuperare un ulteriore ritardo accumulatosi in questo periodo (si parla di *secondo bisestile*). Così dal gennaio 2006 il TUC ritarderà sul TA di 33 s. Gli utenti del GPS dovrebbero sapere che il tempo del GPS è in ritardo sul TA di 19 s, valore immutabile. In definitiva, nel periodo 1999-2005 il TUC ritarda di 64.184 s sul tempo dinamico; dal 2006 e fino a nuova comunicazione il ritardo salirà a 65.184 s.

in cui il tempo T è misurato in secoli giuliani a partire dal 1° gennaio 2000, ore 12 di Tempo Dinamico. Se si conosce la Data Giuliana[5] JD dell'istante considerato si ha

$$T = \frac{JD - 2451545.0}{36525}$$

Il secondo termine della (1) ci dice che la longitudine media del Sole si incrementa di 360.0076983 gradi ogni anno giuliano di 365.25 giorni, e che perciò la sua velocità media è di 0.9856473601 gradi al giorno.[6] Il terzo termine però ci dice che la velocità media varia sia pur di poco col tempo e che questa variazione si può considerare lineare col tempo, almeno in un conveniente intorno dell'anno 2000 (diciamo dall'anno 0 al 4000). Trascureremo questa variazione.

Come è noto, a causa dell'ellitticità dell'orbita terrestre il moto del Sole è talvolta più veloce di quello medio, talvolta più lento; si tiene conto di questo fatto sommando alla longitudine media un termine, che dicesi *equazione del centro*[7] e che si scrive in funzione della distanza della Terra dal perielio,[8] a sua volta espressa da una variabile detta anomalia media M.

In funzione di questa l'equazione del centro vale, in gradi

$$E_C = 1.914600 \ \sin M + 0.019993 \ \sin 2M + 0.000290 \ \sin 3M$$

in cui non ho tenuto conto della variazione secolare dei due primi coefficienti, per non complicarla troppo.

Allora la longitudine vera del Sole, sempre in gradi, vale:

$$L = 280.46645 + 36000.76983\ T + 1.914600 \ \sin M + 0.019993 \ \sin 2M + \\ + 0.000290 \ \sin 3M \qquad (2)$$

[5]La Data Giuliana è il numero di giorni e frazioni di giorno di tempo dinamico trascorsi dal mezzogiorno del 1° gennaio 4713 a.C. all'istante considerato; tutti gli anni antecedenti alla riforma di Gregorio XIII si considerano giuliani, cioè con un bisestile ogni quattro anni, senza eccezioni. La data Giuliana si trova in tutti i calendari astronomici ed in una quantità di siti Internet. La Data Giuliana del 30 settembre 2005, ore 12 di tempo dinamico è 2453614.0.

[6]Tutte le dieci cifre del numero 360.0076983 si devono considerare esatte, mentre il numero 365.25 è esatto per definizione; quindi del quoziente 360.0076983/365.25 abbiamo preso dieci cifre significative.

[7]Nell'antica astronomia la parola equazione significava differenza o correzione, e in questo senso è qui adoperata.

[8]In qualche testo viene ancora adoperata la vecchia espressione: dipende dalla distanza del Sole dal perigeo, che sottintende l'antica tradizione degli autori di effemeridi, cioè di usare il sistema ticonico: Terra immobile e pianeti che girano intorno al Sole.

Per trovare la velocità bisogna eseguire quella che si chiama la derivazione[9] rispetto al tempo, e questo è il risultato:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}T} = 36000.76983 + 1.914600\ \cos M\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}T} + \\ + 0.039986\ \cos 2M\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}T} + 0.000870\ \cos 3M\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}T}.\end{aligned} \tag{3}$$

Ora, la quantità $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}T}$ può essere considerata costante e pari a 35999.0503 gradi per secolo,[10] che però deve essere portata a radianti per secolo, ossia:

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}T} = 628.3019551$$

per cui la formula della velocità diventa[11]

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}T} = 36000.770 + 1202.947\ \cos M + 25.123\ \cos 2M + 0.547\ \cos 3M \tag{4}$$

per cui quando $M = 0$ (cioè al perigeo, ossia in gennaio) la velocità diventa 37229.387 gradi al secolo, ossia 1.01928507 gradi al giorno e quando $M = 180$

[9]L'operazione matematica di derivazione consente di ricavare da una funzione un'altra, che esprime la velocità di variazione della prima. Se F è la funzione data e x la variabile rispetto alla quale effettuiamo la derivata, questa si indica con $\mathrm{d}F/\mathrm{d}x$. Si basa su regole, la cui dimostrazione non è difficile, e delle quali espongo solo quelle che qui servono: la derivata di una somma è uguale alla somma delle derivate, la derivata di una costante è zero (e infatti una costante non ha variazione...), la derivata di una potenza T^n della variabile indipendente è pari a nT^{n-1}, la derivata di una costante per una funzione è data dalla stessa costante per la derivata di quella funzione, la derivata del seno della variabile indipendente è data dal coseno della stessa variabile indipendente, la derivata del seno di una funzione, come nel nostro caso, è dato dal coseno di quella funzione moltiplicato per la derivata della funzione stessa. Come esempio vediamo l'ultimo termine della (2): siccome è una funzione moltiplicata per una costante anche la sua derivata sarà moltiplicata per quella costante; la derivata della funzione seno è coseno, quindi compare il $\cos 3M$, ma poi bisogna ancora moltiplicare per la derivata di $3M$ che a sua volta è 3 moltiplicato per la derivata di M. Naturalmente la variabile rispetto alla quale facciamo la derivata è la variabile tempo T, che è anche la variabile indipendente. Il risultato allora è:

$$0.000290 \times \sin 3M \times 3 \times \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}T}.$$

[10]L'espressione data da Meeus per l'anomalia media della Terra è:

$$M = 357.5291092 + 35999.05002909\ T - 0.0001536\ T^2 + T^3/24490000.$$

Trascuriamo come al solito i termini in T^2 e T^3.

[11]Il secondo coefficiente della (3) ha sette cifre di precisione, il terzo coefficiente ne ha cinque e il terzo ne ha tre, per cui i corrispondenti termini della (4) avranno tre cifre affidabili dopo la virgola; per questo anche il primo termine si dovrà adattare a questa minore precisione. D'altra parte il secondo coefficiente della (3) dipende dalla precisione nella determinazione dell'eccentricità dell'orbita terrestre che è data da Meeus con sette cifre significative, per cui questa precisione non è per il momento migliorabile. Va inoltre notato che questa precisione è coerente con quella dipendente dal termine dell'equazione annuale della Luna, come si vedrà.

(cioè all'apogeo, e quindi in luglio) la velocità è di 34822.399 gradi al secolo ossia 0.95338533 gradi al giorno.

Per quanto riguarda la Luna, la sua longitudine media, sempre riferita all'equinozio medio della data, vale:

$$L'_M = 218.3164591 + 481267.88134236\ T$$

più termini T^2, T^3 e T^4 che qui possiamo allegramente trascurare.

Fra i tantissimi termini perturbativi del moto lunare è qui importante considerare solo quello chiamato *equazione annuale*, che dipende dalla distorsione che l'orbita della Luna subisce quando la Terra è più vicina al Sole. Questo termine si somma alla longitudine media e vale:

$$E_A = -0.185116\ \sin M$$

Considerando solo questa correzione, la longitudine della Luna vale

$$L' = 218.3164591 + 481267.88134236\ T - 0.185116\ \sin M$$

e la sua velocità si ottiene derivando

$$\frac{\mathrm{d}L'}{\mathrm{d}T} = 481267.88134236 - 0.185116\ \cos M \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}T},$$

in cui $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}T}$ vale come prima 628.3019551 radianti al secolo, per cui

$$\frac{\mathrm{d}L'}{\mathrm{d}T} = 481267.881 - 116.309\ \cos M,$$

in cui naturalmente si è adeguato il termine più preciso a quello meno preciso. Si trova con la Terra al perielio ($M = 0$) una velocità di 481151.572 gradi al secolo e quindi 13.17321210 gradi al giorno, e con la Terra all'afelio ($M = 180$) una velocità di 481384.190 gradi al secolo e quindi 13.17958084 gradi al giorno.

In definitiva, quando la Terra è al perielio la Luna sopravanza il Sole ogni giorno di gradi

$$13.17321210 - 1.01928507 = 12.15392703$$

per cui avrà guadagnato un intero giro dopo $360/12.15392703 = 29.6200561$ giorni, pari a $29^d\ 14^h\ 52^m\ 52.85^s$, mentre, quando la Terra è all'afelio la Luna sopravanza il Sole ogni giorno di gradi

$$13.17958084 - 0.95338533 = 12.22619551$$

per cui avrà guadagnato un intero giro dopo $360/12.22619551 = 29.4449733$ giorni, pari a $29^d\ 10^h\ 40^m\ 45.69^s$.

Tali durate del mese sinodico vanno considerate esatte fino alla settima cifra dopo la virgola, e quindi a meno di un centesimo di secondo, cioè ci si può fidare di tutte le cifre qui date.

È da notare che entrambi gli effetti (equazione del centro del Sole ed equazione annuale della Luna) sono concordi: così a gennaio (Terra al perielio) il Sole cammina più veloce e la Luna, per effetto dell'equazione annuale, cammina più lenta della media, per cui il mese lunare ne risulta allungato; l'opposto avviene a luglio quando la Terra è all'afelio.

Come conferma riporto una tabella, tratta da Meeus, con le durate delle lunazioni più brevi e più lunghe, del periodo 1900-2100.

Tabella 1: I mesi sinodici più corti e più lunghi nel periodo 1900-2100.

Dalla luna nuova del	alla luna nuova del	Durata
25 giugno 1903	24 luglio 1903	$29^d\ 6^h\ 35^m$
6 giugno 2035	5 luglio 2035	$29^d\ 6^h\ 39^m$
16 giugno 2053	15 luglio 2053	$29^d\ 6^h\ 35^m$
27 giugno 2071	27 luglio 2071	$29^d\ 6^h\ 36^m$
14 dicembre 1955	13 gennaio 1956	$29^d\ 19^h\ 54^m$
24 dicembre 1973	23 gennaio 1974	$29^d\ 19^h\ 55^m$

Come si vede, i mesi più lunghi capitano a cavallo del perielio della Terra e quelli più corti a cavallo dell'afelio. La differenza delle durate da quelle medie date sopra dipende naturalmente dalle ulteriori perturbazioni ed in particolare dall'ellitticità dell'orbita lunare.