Carte celesti stereoscopiche

Giuseppe Giudice

28 novembre 2005

La disegnazione di carte celesti stereoscopiche presenta alcune particolarità rispetto alla ordinaria prospettiva di oggetti tridimensionali normalmente studiati nel disegno industriale. Non sono perciò riuscito a trovare alcun testo soddisfacente per questo caso.

Tuttavia, poiché la teoria di queste rappresentazioni è semplicissima, presento qui un breve schizzo dell'algoritmo da implementare.

1. Innanzitutto occorre selezionare l'area di cielo da rappresentare; ciò è importante per evitare complicazioni nelle successive elaborazioni. Dal catalogo da cui si attinge si prenderanno le stelle entro certi limiti di AR e declinazione, salvo "raffinare" ulteriormente la scelta in una fase successiva.

2. Si suppone di conoscere per ogni stella selezionata le tre coordinate α (AR), δ (declinazione) ed r (distanza eliocentrica).

3. Si determinano per tutte le stelle le coordinate x, y, z rispetto ad un sistema cartesiano con l'origine nel Sole e così definito:

   - l'asse x punta verso il punto d'Ariete (punto gamma),
   - l'asse z punta verso il Polo Nord,
   - l'asse y è scelto in modo da formare una terna trirettangola levogira (detta anche destrorsa); esso, tanto per capirci, deve puntare verso $\alpha = 6^{\mathrm{h}}$; $\delta = 0°$.

   Le richieste coordinate sono :

   $$x = r \cos\delta \cos\alpha$$

   $$y = r \cos\delta \sin\alpha$$

   $$z = r \sin\delta$$

4. Si fa ruotare il detto sistema cartesiano in modo che l'asse x ora si diriga verso il punto centrale della 'veduta" che sarà disegnata. Se questo punto ha coordinate $\alpha_0, delta_0$ occorrono due rotazioni: una intorno all'asse z in modo che x vada sulla giusta ascensione retta, sempre rimanendo sul piano equatoriale, e l'altra attorno al nuovo asse y (cioè all'asse y già ruotato) in modo che l'asse x si alzi o si abbassi verso la declinazione giusta. Si nuoti qui che tutte le rotazioni sono positive se viste come antiorarie da un osservatore disteso lungo l'asse di rotazione, con i piedi verso l'origine

e la testa verso la freccia dell'asse, se cioè sono antiorarie quando viste dall'esterno della sfera celeste.

Nel nostro caso occorre quindi una rotazione di ampiezza α_0 intorno a z e una di ampiezza $-\delta_0$ intorno ad y (questa rotazione è negativa, cioè oraria, se δ_0 è positiva e positiva, cioè antioraria, se δ_0 è negativa, e ciò spiega il seno meno).

Le rotazioni di un sistema di assi possono essere ottenute facilmente con metodo matriciale. Le nuove coordinate x', y', z' (dopo le due rotazioni) sono date da:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}(-\delta_0)\boldsymbol{R}(\alpha_0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

in cui

$$\boldsymbol{Q}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(vedasi Danby, Fundamentals of Celestial Mechanics, Willman-Bell

5. Per assicurare la visione stereoscopica occorre introdurre due punti di vista spostati lungo l'asse y di una certa distanza a sinistra e a destra dell'origine.

   Tuttavia si può ravvisare l'opportunità di spostarli anche nel verso negativo dell'asse x. Infatti, se tra le stelle da rappresentare ve ne sono alcune più vicine di altre l'effetto stereoscopico si potrebbe perdere per per la difficoltà dell'occhio di far coincidere i punti corrispondenti ad una singola stella. Per la stessa ragione il valore dello spostamento in y deve essere scelto con oculatezza (appunto) e forse con qualche tentativo.

   Per dare la massima generalità alla trattazione ipotizzerò quindi che i punti di vista siano $(-x^*, -y^*, 0)$ per l'occhio sinistro e $(-x^*, y^*, 0)$ per l'occio destro, ciascuno dei quali fungerà da origine di due riferimenti, che chiamerò sinistro e destro e indicherò con i pedici $_S$ e $_D$. Le coordinate dei punti-stella nei due riferimenti sono

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + x^* \\ y' + y^* \\ z' \end{pmatrix}$$

   e

$$\begin{pmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + x^* \\ y' - y^* \\ z' \end{pmatrix}$$

6. I punti di ciascun riferimento vanno ora proiettati sulla carta.

Il foglio su cui si proietta deve essere parallelo al piano yz dal lato positivo dell'asse x (cioè tra l'occhio e le stelle) ad una distanza x_F dall'origine. Le coordinate dei punti di proiezione sono:

$$y_{FS} = \frac{x_F}{x_S} y_S \qquad z_{FS} = \frac{x_F}{x_S} z_S$$

e

$$y_{FD} = \frac{x_F}{x_D} y_D \qquad z_{FS} = \frac{x_F}{x_D} z_D$$

7. Notare che gli assi in questa rappresentazione puntano: L'asse z_F verso l'alto e l'asse y_F verso sinistra (anzicché verso destra); volendo si può indicare z_F come y_{carta} e y_F come $-x_{carta}$.